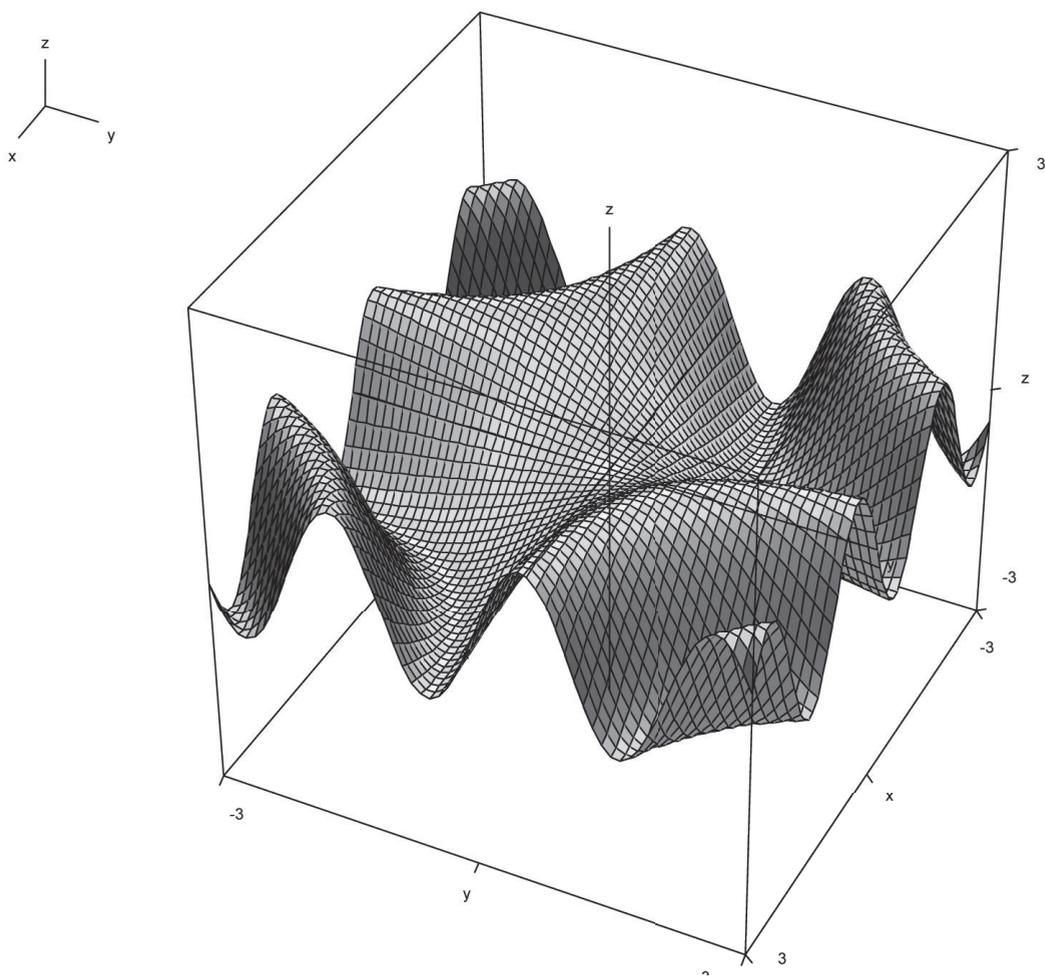


Alvaro Marucci

# *Lezioni di matematica generale*



$$f(x,y) = \text{sen}(x \cdot y)$$

ISBN: 978-88-7853-222-9  
4<sup>a</sup> edizione settembre 2010

Edizioni **SETTE CITTÀ**  
Via Mazzini, 87  
01100 Viterbo  
tel 0761304967  
fax 07611760202

info@settecitta.it  
<http://www.settecitta.it>

# I N D I C E

<b>1. TEORIA DEGLI INSIEMI</b>	
1.1 Gli insiemi . . . . .	1
1.2 Rappresentazione degli insiemi . . . . .	2
1.3 Insiemi complementare, intersezione, unione, differenza, prodotto cartesiano . . . . .	3
1.4 Relazioni, applicazioni o funzioni . . . . .	11
1.5 Funzioni iniettive, suriettive, biettive . . . . .	14
1.6 Funzioni monotone . . . . .	19
1.7 Funzioni pari e dispari . . . . .	22
1.8 Insiemi numerici . . . . .	24
1.9 Potenze . . . . .	29
1.10 Monomi, binomi . . . . .	38
1.11 Equazioni di 1° grado . . . . .	43
1.12 Equazioni di 2° grado . . . . .	44
<b>2. ELEMENTI DI CALCOLO COMBINATORIO</b>	
2.1 Generalità . . . . .	49
2.2 Disposizioni semplici e con ripetizione di n oggetti di classe k . . . . .	50
2.3 Permutazioni semplici e con ripetizione di n oggetti . . . . .	52
2.4 Combinazioni semplici e con ripetizione di n oggetti di classe k . . . . .	54
2.5 Proprietà dei coefficienti binomiali . . . . .	56
<b>3. MATRICI E DETERMINANTI</b>	
3.1 Definizione di matrice, somma e prodotto tra matrici, matrici nulla, opposta, trasposta ed inversa . . . . .	62
3.2 Determinante, sviluppo del determinante, regola di Sarrus, teoremi di Laplace . . . . .	69
3.3 Proprietà generali dei determinanti . . . . .	78
3.4 Rango o caratteristica di una matrice . . . . .	81
3.5 Matrice inversa . . . . .	82
<b>4. SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI</b>	
4.1 Premessa . . . . .	88
4.2 Sistemi normali, regola di Cramer . . . . .	92
4.3 Sistemi non normali, teorema di Rouchè-Capelli . . . . .	99
4.4 Sistemi omogenei . . . . .	103
4.5 Autovalori e autovettori di una matrice quadrata . . . . .	109
<b>5. ELEMENTI DI TRIGONOMETRIA</b>	
5.1 Definizioni . . . . .	112
5.2 Grafico delle funzioni trigonometriche . . . . .	116

5.3	Formule di trigonometria	118
5.4	Funzioni trigonometriche inverse	119
5.5	Triangolo rettangolo e funzioni trigonometriche	120
5.6	Teorema della corda	121
5.7	Teorema dei seni (o di Eulero)	122
5.8	Teorema delle proiezioni	123
5.9	Teorema del coseno (o di Carnot)	124
5.10	Area di un triangolo noti i due lati e l'angolo tra essi compreso	125
5.11	Sistemi di riferimento piani	126
<b>6.</b>	<b>GEOMETRIA ANALITICA NEL PIANO</b>	
6.1	Piano cartesiano, distanza tra due punti	132
6.2	La retta	133
6.3	Circonferenza	146
6.4	Ellisse	148
6.5	Iperbole	150
6.6	Parabola	152
6.7	Equazione generale delle coniche	157
<b>7.</b>	<b>GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO</b>	
7.1	Vettori	161
7.2	Prodotto scalare (o interno) tra due vettori	164
7.3	Prodotto vettoriale (o esterno) tra due vettori	166
7.4	Prodotto misto di tre vettori	168
7.5	Riferimento cartesiano	170
7.6	Il piano	172
7.7	Intersezione di piani, piani paralleli, piani coincidenti	179
7.8	La retta	184
7.9	Retta-piano	187
7.10	Coseni direttori	191
7.11	Angolo tra due rette	193
7.12	Fascio proprio di piani	195
7.13	Equazione vettoriale del piano	196
7.14	Distanza tra un punto ed un piano	198
7.15	Angolo tra due piani	200
7.16	Angolo tra una retta ed un piano	202
7.17	Esercizi	203
<b>8.</b>	<b>LIMITI DI FUNZIONI</b>	
8.1	La nozione di limite	206
8.2	Teorema dell'unicità del limite	218
8.3	Teorema della permanenza del segno	219
8.4	Teorema del confronto	220
8.5	Operazioni sui limiti	222

8.6	Funzioni continue	228
8.7	Limiti notevoli	230
8.8	Esercizi	236
<b>9.</b>	<b>CALCOLO DIFFERENZIALE IN UNA VARIABILE</b>	
9.1	Definizione di derivata	238
9.2	Differenziale di una funzione	243
9.3	Importanza della derivata	245
9.4	Derivata di alcune funzioni elementari	249
9.5	Regole di derivazione	257
9.6	Teorema di Rolle	268
9.7	Teorema di Lagrange	272
9.8	Teorema di Cauchy	276
9.9	Regola di de L'Hôpital	278
9.10	Polinomio di Taylor	281
<b>10.</b>	<b>MASSIMI, MINIMI, FLESSI, CONCAVITA', ASINTOTI E GRAFICO DI UNA FUNZIONE IN UNA VARIABILE</b>	
10.1	Massimi e minimi di una funzione $f$	284
10.2	Concavità, convessità, flessi	287
10.3	Asintoti verticali, orizzontali, obliqui	289
10.4	Esercizi	292
<b>11.</b>	<b>ELEMENTI DI CALCOLO DIFFERENZIALE IN DUE VARIABILI</b>	
11.1	Funzioni di due variabili	306
11.2	Limiti delle funzioni di due variabili	307
11.3	Continuità delle funzioni di due variabili	308
11.4	Derivate parziali delle funzioni di due variabili	309
11.5	Ricerca dei massimi e dei minimi nelle funzioni di due variabili	313
11.6	Esercizio	315
<b>12.</b>	<b>CALCOLO INTEGRALE IN UNA VARIABILE</b>	
12.1	Integrali indefiniti	318
12.2	Integrali indefiniti immediati	320
12.3	Integrazione di funzioni composte	322
12.4	Metodi di integrazione indefinita	324
12.5	Integrazione di funzioni razionali	331
12.6	Integrali impropri o generalizzati	336
12.7	Integrali estesi ad intervalli illimitati	338
12.8	Integrali definiti	340
12.9	Teorema della media	344
12.10	Funzione integrale, teorema fondamentale del calcolo integrale	346
12.11	Calcolo del volume dei solidi di rotazione	351

<b>13. INTEGRALI DOPPI</b>	
13.1 Integrali doppi	357
13.2 Significato geometrico dell'integrale doppio	360
13.3 Esercizio	361
<b>14. CENNI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI</b>	
14.1 Equazioni differenziali	363
14.2 Equazioni differenziali a variabili separate	364
14.3 Equazioni differenziali a variabili separabili	367
14.4 Equazioni differenziali omogenee	371
14.5 Equazioni differenziali lineari	374
<b>15. ESERCIZI DA SVOLGERE</b>	
15.1 Determinare gli elementi dei seguenti insiemi (in forma tabulare)	378
15.2 Calcolare i seguenti determinanti	379
15.3 Individuare il rango delle seguenti matrici	379
15.4 Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari	380
15.5 Esercizi di geometria	383
15.6 Derivare le seguenti funzioni	385
15.7 Studiare e rappresentare il grafico delle seguenti funzioni	386
15.8 Integrare le seguenti funzioni	389
15.9 Risolvere le seguenti equazioni differenziali	391
<b>ALLEGATI</b>	<b>392</b>

# 1. TEORIA DEGLI INSIEMI

## 1.1 Gli insiemi

In matematica il concetto di insieme è importante perché consente di considerare gli oggetti collettivamente, a gruppi, e di esaminare se tra di essi esistono delle *relazioni*, cioè delle leggi che associano oggetti ad altri oggetti.

Ad esempio, noi abbiamo imparato a contare quando siamo riusciti a mettere in relazione gruppi di oggetti anche molto diversi tra loro ma con in comune qualcosa.... la quantità degli elementi, cioè il numero, vale a dire la numerosità degli oggetti.

Ad esempio:

- note musicali e giorni della settimana;
- vocali e dita di una mano;
- giorni della settimana e giocatori di una squadra di pallanuoto.

Georg Cantor (1845-1918), matematico di Pietroburgo vissuto in Germania, introdusse il concetto matematico di insieme:

“Con questa denominazione indico un concetto assai vasto...., con questa denominazione di insieme io intendo, infatti, in generale, ogni pluralità che si possa pensare come un tutto unico, cioè ogni pluralità di elementi determinati, che possa essere condotta, mediante una certa logica, a formare un tutto”.

E sempre Cantor definì:

“un insieme è una collezione, concepita come un tutto di oggetti ben distinguibili dalla nostra intuizione o dal nostro pensiero”.

Possiamo pertanto definire **l'insieme** come *qualunque aggregato di elementi, distinguibili e ben definiti, per i quali è stabilita una specifica relazione di appartenenza*.

Cioè dato un elemento qualsiasi si deve poter stabilire con assoluta certezza se esso appartiene o non appartiene all'insieme considerato.

Esempi di insiemi sono:

- insieme dei numeri naturali minori di 100;
- insieme dei cittadini italiani che hanno votato alle ultime elezioni;
- insieme degli alberi del Central Park di New York.

Mentre i seguenti gruppi di elementi:

- insieme delle persone alte;
- insieme delle auto veloci;
- insieme dei calciatori bravi;

non costituiscono insiemi in quanto non è possibile stabilire con esattezza da quali elementi sono composti.

## 1.2 Rappresentazione degli insiemi

1) **DIAGRAMMA DI VENN (O DI EULERO-VENN)** – l'insieme è rappresentato in modo visivo, attraverso una linea chiusa che racchiude tutti gli elementi.

Ad esempio, mediante il diagramma di Venn, l'insieme delle prime 6 lettere dell'alfabeto italiano si rappresenta (figura 1.1):

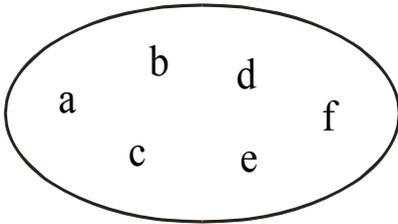


figura 1.1

2) **PROPRIETA' CARATTERISTICA RELATIVA AGLI ELEMENTI DELL'INSIEME** – rappresentazione mediante la legge di appartenenza degli elementi all'insieme.

Nell'esempio precedente si ha:

$$X = \{x \mid x \text{ una delle prime 6 lettere dell'alfabeto italiano}\}$$

3) **ELENCO DEGLI ELEMENTI** – l'insieme è rappresentato mediante l'elenco di tutti gli elementi (rappresentazione tabulare).

Nell'esempio considerato risulta:

$$X = \{a, b, c, d, e, f\}$$

La proposizione “a è un elemento di X” si indica:

$$a \in X$$

si dice anche “a appartiene ad X”

mentre la proposizione “a non è un elemento di X” si indica:

$$a \notin X$$

si dice anche “a non appartiene ad X”

Un insieme privo di elementi, cioè l'insieme vuoto, si indica:

$$X = \{ \} = \emptyset$$

### 1.3 Insiemi complementare, intersezione, unione, differenza, prodotto cartesiano

Consideriamo due insiemi A e B,

- se l'insieme A è costituito dagli stessi elementi dell'insieme B, gli insiemi sono uguali:

$$A=B$$

- se ogni elemento di A è anche elemento di B allora A è sottoinsieme di B, oppure A è contenuto in B (figura 1.2):

$$A \subset B$$

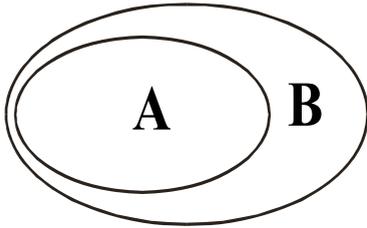


figura 1.2

Esempio:

$$A = \{a \mid a \text{ una delle prime 6 lettere dell'alfabeto italiano}\}$$

$$B = \{b \mid b \text{ una delle prime 10 lettere dell'alfabeto italiano}\}$$

Mediante il diagramma di Venn (figura 1.3) si ha:

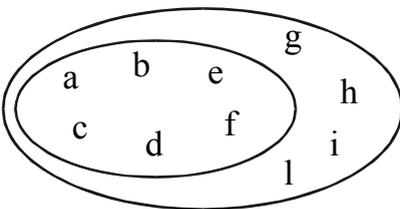


figura 1.3

Non confondere la relazione di **inclusione**  $\subset$ , che si riferisce agli insiemi, con quella di **appartenenza**  $\in$ , che si riferisce agli elementi di un certo insieme:

$$\subset \neq \in$$

Dato un insieme A, esistono sempre due suoi sottoinsiemi, A stesso e l'insieme vuoto. Questi due sottoinsiemi si dicono **impropri**, tutti gli altri si dicono **propri**.

Dati due insiemi A e B, con  $A \subset B$ , ad esempio:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l\}$$

si definisce **complementare di A rispetto a B**, l'insieme costituito dagli elementi che appartengono a B e non appartengono ad A:

$$C_B A = B - A = \{x \mid x \in B, x \notin A\}$$

che nell'esempio diventa:

$$C_B A = B - A = \{g, h, i, l\}$$

L'insieme  $C_B A$ , mediante il diagramma di Venn, si rappresenta (figura 1.4):

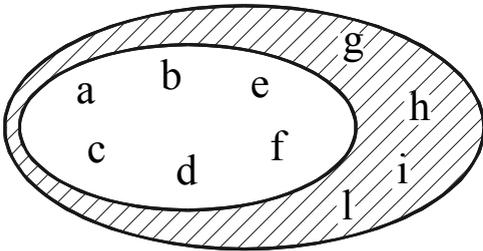


figura 1.4

In altri termini il complementare di A rispetto a B è dato dagli elementi che mancano ad A per essere uguale a B.

Dati due insiemi A e B non disgiunti, si definisce **insieme intersezione di A e B** l'insieme  $C = A \cap B$  costituito da tutti gli elementi in comune, cioè che appartengono sia ad A che a B (figura 1.5).

$$C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

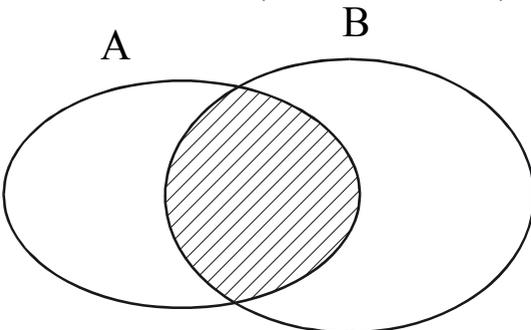


figura 1.5