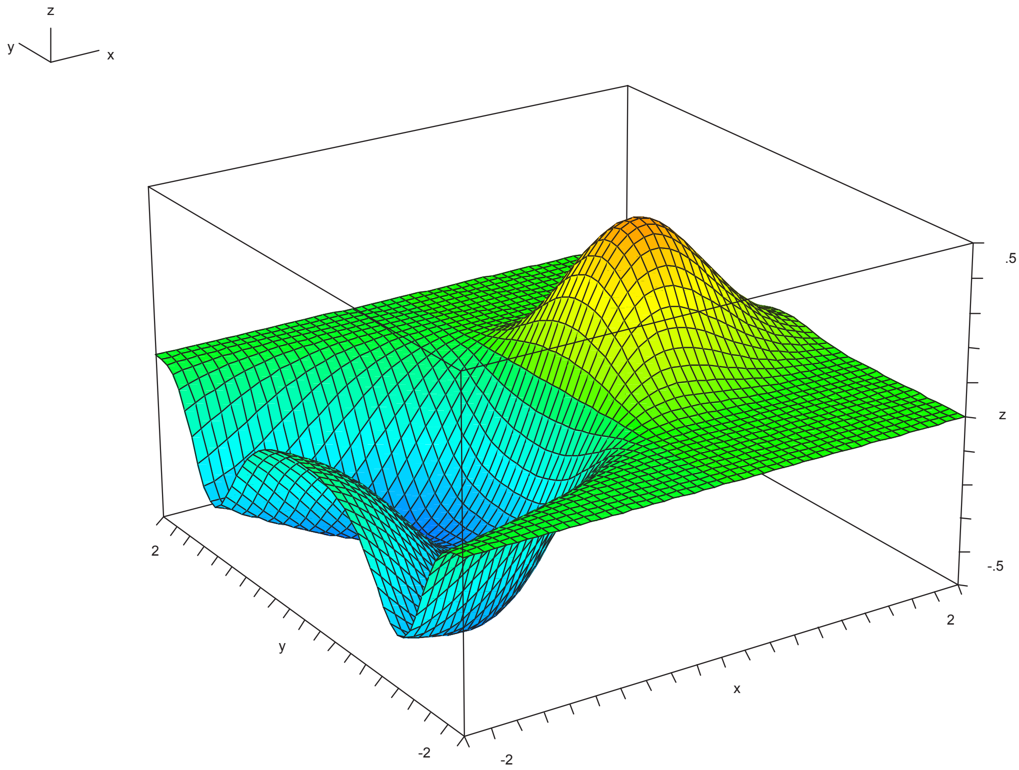
Alvaro Marucci

Lezioni di matematica generale



$$f(x, y) = x \cdot e^{-\left(x+y^2\right)^2 - y^2}$$

ISBN: 978-88-7853-398-1

V edizione settembre 2015

Edizioni ***Sette Città***
Via Mazzini 87
01100 - Viterbo

info@settecitta.eu

www.settecitta.eu

I N D I C E

10. MASSIMI, MINIMI, FLESSI, CONCAVITA', ASINTOTI E GRAFICO DI UNA FUNZIONE IN UNA VARIABILE

11. ELEMENTI DI CALCOLO DIFFERENZIALE IN DUE VARIABILI

12. CALCOLO INTEGRALE IN UNA VARIABILE

13. INTEGRALI DOPPI

14. CENNI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

15. ESERCIZI DA SVOLGERE

1. TEORIA DEGLI INSIEMI

1.1 Gli insiemi

In matematica il concetto di insieme è importante perché consente di considerare gli oggetti collettivamente, a gruppi, e di esaminare se tra di essi esistono delle *relazioni*, cioè delle leggi che associano oggetti ad altri oggetti.

Ad esempio, noi abbiamo imparato a contare quando siamo riusciti a mettere in relazione gruppi di oggetti anche molto diversi tra loro ma con in comune qualcosa….. la quantità degli elementi, cioè il numero, vale a dire la numerosità degli oggetti.

Ad esempio i seguenti gruppi:
- note musicali e giorni della settimana;
- vocali e dita di una mano;
- giorni della settimana e giocatori di una squadra di pallanuoto;

hanno in comune solo la numerosità degli elementi.

Georg Cantor (1845-1918), matematico di Pietroburgo vissuto in Germania, introdusse il concetto matematico di insieme: "Con questa denominazione indico un concetto assai vasto…., con questa denominazione di insieme io intendo, infatti, in generale, ogni pluralità che si possa pensare come un tutto unico, cioè ogni pluralità di elementi determinati, che possa essere condotta, mediante una certa logica, a formare un tutto".

E sempre Cantor definì:
"un insieme è una collezione, concepita come un tutto di oggetti ben distinguibili dalla nostra intuizione o dal nostro pensiero".

Possiamo pertanto definire **l'insieme** come *qualunque aggregato di elementi, distinguibili e ben definiti, per i quali è stabilita una specifica relazione di appartenenza*.

Cioè dato un elemento qualsiasi si deve poter stabilire con assoluta certezza se esso appartiene o non appartiene all'insieme considerato.

Esempi di insiemi sono:
- insieme dei numeri naturali minori di 100;
- insieme dei cittadini italiani che hanno votato alle ultime elezioni;
- insieme degli alberi del Central Park di New York.

Mentre i seguenti gruppi di elementi:
- insieme delle persone alte;
- insieme delle auto veloci;
- insieme dei calciatori bravi;

non costituiscono insiemi in quanto non è possibile stabilire con esattezza da quali elementi sono composti.

1.2 Rappresentazione degli insiemi

1) DIAGRAMMA DI VENN (O DI EULERO-VENN) – l'insieme è rappresentato in modo visivo, attraverso una linea chiusa che racchiude tutti gli elementi.

   Ad esempio, mediante il diagramma di Venn, l'insieme delle prime 6 lettere dell'alfabeto italiano si rappresenta (figura 1.1):

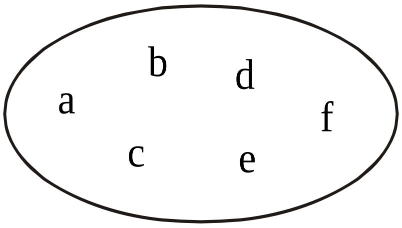


figura 1.1

2) PROPRIETA' CARATTERISTICA RELATIVA AGLI ELEMENTI DELL'INSIEME – rappresentazione mediante la legge di appartenenza degli elementi all'insieme.

   Nell'esempio precedente si ha:
   $X = \{x \mid x \text{ una delle prime 6 lettere dell'alfabeto italiano}\}$

3) ELENCO DEGLI ELEMENTI – l'insieme è rappresentato mediante l'elenco di tutti gli elementi (rappresentazione tabulare).

   Nell'esempio considerato risulta:
   $X = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\ \}$

La proposizione "a è un elemento di X" si indica:

$a \in X$

si dice anche "a appartiene ad X"

mentre la proposizione "a non è un elemento di X" si indica:

$a \notin X$

si dice anche "a non appartiene ad X"

Un insieme privo di elementi, cioè l'insieme vuoto, si indica:

$X = \{\ \} = \varnothing$

1.3 Insiemi complementare, intersezione, unione, differenza, prodotto cartesiano

Consideriamo due insiemi A e B,

- se l'insieme A è costituito dagli stessi elementi dell'insieme B, gli insiemi sono uguali:
  $A=B$

- se ogni elemento di A è anche elemento di B allora A è sottoinsieme di B, oppure A è contenuto in B (figura 1.2):
  $A\subset B$

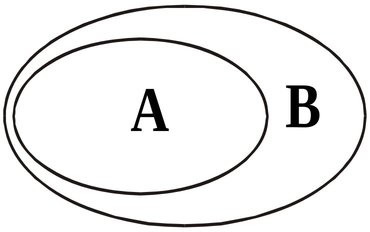


figura 1.2

Esempio:

$A=\{a \mid a \text{ una delle prime 6 lettere dell'alfabeto italiano}\}$

$B=\{b \mid b \text{ una delle prime 10 lettere dell'alfabeto italiano}\}$

Mediante il diagramma di Venn (figura 1.3) si ha:

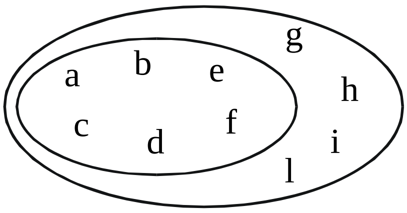


figura 1.3

Non confondere la relazione di **inclusione** $\subset$, che si riferisce agli insiemi, con quella di **appartenenza** $\in$, che si riferisce agli elementi di un certo insieme:

$\subset \neq \in$

Dato un insieme A, esistono sempre due suoi sottoinsiemi, A stesso e l'insieme vuoto. Questi due sottoinsiemi si dicono **impropri,** tutti gli altri si dicono **propri**.

Dati due insiemi A e B, con $A\subset B$, ad esempio:

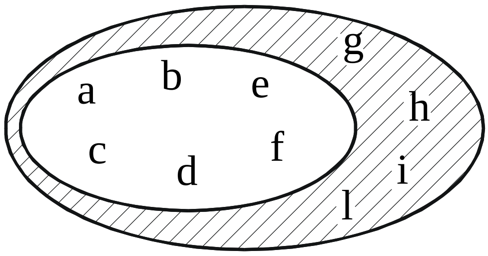
$A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\ \}$

$B=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i,\ l\ \}$

si definisce **complementare di A rispetto a B**, l'insieme costituito dagli elementi che appartengono a B e non appartengono ad A:

$C_B A = B - A = \{x \mid x \in B,\ x \notin A\}$
che nell'esempio diventa:
$C_B A = B - A = \{g,\ h,\ i,\ l\}$

L'insieme $C_B A$, mediante il diagramma di Venn, si rappresenta (figura 1.4):



In altri termini il complementare di A rispetto a B è dato dagli elementi che mancano ad A per essere uguale a B.

figura 1.4

Dati due insiemi A e B non disgiunti, si definisce **insieme intersezione di A e B** l'insieme $C = A \cap B$ costituito da tutti gli elementi in comune, cioè che appartengono sia ad A che a B (figura 1.5).

$$C = A \cap B = \{x \mid x \in A \ \ e \ \ x \in B\}$$

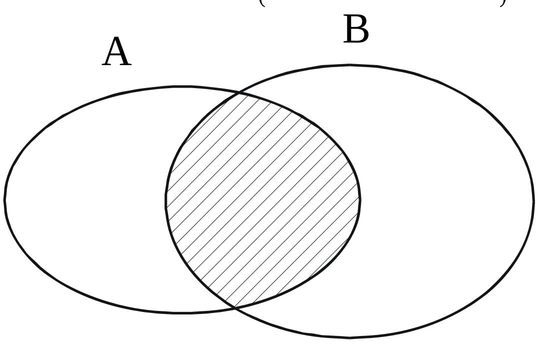


figura 1.5

Ad esempio, considerando gli insiemi:
$A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$
$B = \{d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i\}$

l'insieme C intersezione di A e B risulta:
$C = A \cap B = \{d,\ e,\ f\}$

Tale insieme, mediante il diagramma di Venn, si rappresenta (figura 1.6):

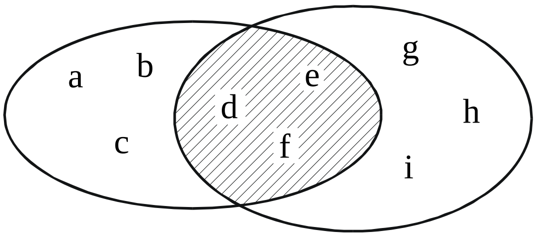


figura 1.6