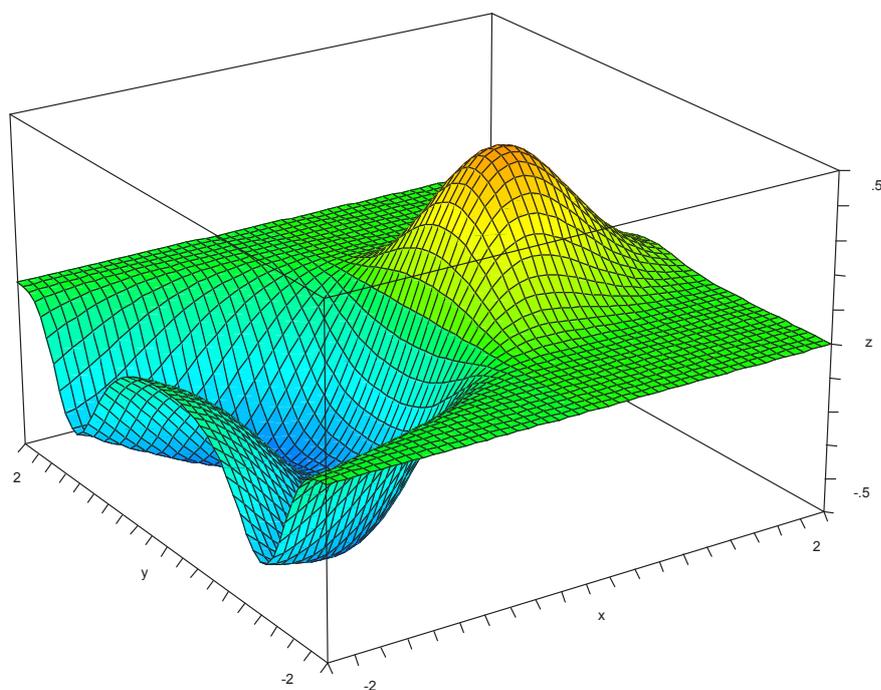
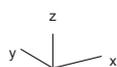


*Alvaro Marucci*

# Lezioni di matematica generale



$$f(x, y) = x \cdot e^{-(x+y^2)^2 - y^2}$$



ISBN: 978-88-7853-398-1

V edizione settembre 2015

Edizioni *Sette Città*

Via Mazzini 87

01100 - Viterbo

[info@settecitta.eu](mailto:info@settecitta.eu)

[www.settecitta.eu](http://www.settecitta.eu)

# I N D I C E

<b>1. TEORIA DEGLI INSIEMI</b>	
1.1 Gli insiemi	1
1.2 Rappresentazione degli insiemi	2
1.3 Insiemi complementare, intersezione, unione, differenza, prodotto cartesiano	3
1.4 Relazioni, applicazioni o funzioni	10
1.5 Funzioni iniettive, suriettive, biettive	12
1.6 Funzioni monotone	17
1.7 Funzioni pari e dispari	20
1.8 Insiemi numerici	22
1.9 Potenze	26
1.10 Monomi, binomi	33
1.11 Equazioni di 1° grado	37
1.12 Equazioni di 2° grado	38
<b>2. ELEMENTI DI CALCOLO COMBINATORIO</b>	
2.1 Generalità	41
2.2 Disposizioni semplici e con ripetizione di n oggetti di classe k	41
2.3 Permutazioni semplici e con ripetizione di n oggetti	43
2.4 Combinazioni semplici e con ripetizione di n oggetti di classe k	44
2.5 Proprietà dei coefficienti binomiali	45
<b>3. MATRICI E DETERMINANTI</b>	
3.1 Definizione di matrice, somma e prodotto tra matrici, matrici nulla, opposta, trasposta ed inversa	50
3.2 Determinante, sviluppo del determinante, regola di Sarrus, teoremi di Laplace.	55
3.3 Proprietà generali dei determinanti	61
3.4 Rango o caratteristica di una matrice	63
3.5 Matrice inversa	63
<b>4. SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI</b>	
4.1 Premessa	67
4.2 Sistemi normali, regola di Cramer	70
4.3 Sistemi non normali, teorema di Rouchè-Capelli	76
4.4 Sistemi omogenei	79
4.5 Autovalori e autovettori di una matrice quadrata	83
<b>5. ELEMENTI DI TRIGONOMETRIA</b>	
5.1 Definizioni	86
5.2 Grafico delle funzioni trigonometriche	90
5.3 Formule di trigonometria	92
5.4 Funzioni trigonometriche inverse	93
5.5 Triangolo rettangolo e funzioni trigonometriche	94
5.6 Teorema della corda	95
5.7 Teorema dei seni (o di Eulero)	96
5.8 Teorema delle proiezioni	97
5.9 Teorema del coseno (o di Carnot)	98
5.10 Area di un triangolo noti i due lati e l'angolo tra essi compreso	99
5.11 Sistemi di riferimento piani	100

<b>6. GEOMETRIA ANALITICA NEL PIANO</b>	
6.1 Piano cartesiano, distanza tra due punti	105
6.2 La retta	106
6.3 Circonferenza	117
6.4 Ellisse	119
6.5 Iperbole	121
6.6 Parabola	123
6.7 Equazione generale delle coniche	127
<b>7. GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO</b>	
7.1 Vettori	131
7.2 Prodotto scalare (o interno) tra due vettori	134
7.3 Prodotto vettoriale (o esterno) tra due vettori	136
7.4 Prodotto misto di tre vettori	138
7.5 Riferimento cartesiano	140
7.6 Il piano	142
7.7 Intersezione di piani, piani paralleli, piani coincidenti	149
7.8 La retta	153
7.9 Retta-piano	155
7.10 Coseni direttori	159
7.11 Angolo tra due rette	161
7.12 Fascio proprio di piani	163
7.13 Equazione vettoriale del piano	164
7.14 Distanza tra un punto ed un piano	166
7.15 Angolo tra due piani	168
7.16 Angolo tra una retta ed un piano	170
7.17 Esercizi svolti	171
<b>8. LIMITI DI FUNZIONI</b>	
8.1 La nozione di limite	174
8.2 Teorema dell'unicità del limite	185
8.3 Teorema della permanenza del segno	186
8.4 Teorema del confronto	187
8.5 Operazioni sui limiti	188
8.6 Funzioni continue	193
8.7 Limiti notevoli	194
8.8 Esercizi svolti	200
<b>9. CALCOLO DIFFERENZIALE IN UNA VARIABILE</b>	
9.1 Definizione di derivata	202
9.2 Differenziale di una funzione	206
9.3 Importanza della derivata	208
9.4 Derivata di alcune funzioni elementari	212
9.5 Regole di derivazione	220
9.6 Teorema di Rolle	229
9.7 Teorema di Lagrange	233
9.8 Teorema di Cauchy	236
9.9 Regola di de L'Hôpital	237
9.10 Polinomio di Taylor	239

<b>10. MASSIMI, MINIMI, FLESSI, CONCAVITA', ASINTOTI E GRAFICO DI UNA FUNZIONE IN UNA VARIABILE</b>	
10.1 Massimi e minimi di una funzione $f$ .....	241
10.2 Concavità, convessità, flessi .....	244
10.3 Asintoti verticali, orizzontali, obliqui .....	246
10.4 Esercizi svolti .....	249
<b>11. ELEMENTI DI CALCOLO DIFFERENZIALE IN DUE VARIABILI</b>	
11.1 Funzioni di due variabili .....	265
11.2 Limiti delle funzioni di due variabili .....	265
11.3 Continuità delle funzioni di due variabili .....	267
11.4 Derivate parziali delle funzioni di due variabili .....	268
11.5 Ricerca dei massimi e dei minimi nelle funzioni di due variabili .....	271
11.6 Esercizio svolto .....	272
<b>12. CALCOLO INTEGRALE IN UNA VARIABILE</b>	
12.1 Integrali indefiniti .....	274
12.2 Integrali indefiniti immediati .....	275
12.3 Integrazione di funzioni composte .....	276
12.4 Metodi di integrazione indefinita .....	278
12.5 Integrazione di funzioni razionali .....	284
12.6 Integrali impropri o generalizzati .....	288
12.7 Integrali estesi ad intervalli illimitati .....	289
12.8 Integrali definiti .....	291
12.9 Teorema della media .....	294
12.10 Funzione integrale, teorema fondamentale del calcolo integrale .....	296
12.11 Calcolo del volume dei solidi di rotazione .....	300
<b>13. INTEGRALI DOPPI</b>	
13.1 Integrali doppi .....	306
13.2 Significato geometrico dell'integrale doppio .....	308
13.3 Esercizio svolto .....	309
<b>14. CENNI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI</b>	
14.1 Equazioni differenziali .....	311
14.2 Equazioni differenziali a variabili separate .....	311
14.3 Equazioni differenziali a variabili separabili .....	314
14.4 Equazioni differenziali omogenee .....	317
14.5 Equazioni differenziali lineari .....	319
<b>15. ESERCIZI DA SVOLGERE</b>	
15.1 Determinare gli elementi dei seguenti insiemi (in forma tabulare) .....	323
15.2 Calcolare i seguenti determinanti .....	324
15.3 Individuare il rango delle seguenti matrici .....	325
15.4 Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari .....	325
15.5 Esercizi di geometria .....	327
15.6 Esercizi sul apporto incrementale .....	329
15.7 Derivare le seguenti funzioni .....	329
15.8 Esercizi sul significato geometrico della derivata .....	331
15.9 Calcolare i seguenti limiti applicando la regola di De L'Hôpital .....	331
15.10 Studiare e rappresentare il grafico delle seguenti funzioni .....	332

15.11 Integrare le seguenti funzioni .....	334
15.12 Risolvere le seguenti equazioni differenziali .....	336
<b>ALLEGATI .....</b>	<b>337</b>

# 1. TEORIA DEGLI INSIEMI

## 1.1 Gli insiemi

In matematica il concetto di insieme è importante perché consente di considerare gli oggetti collettivamente, a gruppi, e di esaminare se tra di essi esistono delle *relazioni*, cioè delle leggi che associano oggetti ad altri oggetti.

Ad esempio, noi abbiamo imparato a contare quando siamo riusciti a mettere in relazione gruppi di oggetti anche molto diversi tra loro ma con in comune qualcosa..... la quantità degli elementi, cioè il numero, vale a dire la numerosità degli oggetti.

Ad esempio i seguenti gruppi:

- note musicali e giorni della settimana;
- vocali e dita di una mano;
- giorni della settimana e giocatori di una squadra di pallanuoto;

hanno in comune solo la numerosità degli elementi.

Georg Cantor (1845-1918), matematico di Pietroburgo vissuto in Germania, introdusse il concetto matematico di insieme: “Con questa denominazione indico un concetto assai vasto....., con questa denominazione di insieme io intendo, infatti, in generale, ogni pluralità che si possa pensare come un tutto unico, cioè ogni pluralità di elementi determinati, che possa essere condotta, mediante una certa logica, a formare un tutto”.

E sempre Cantor definì:

“un insieme è una collezione, concepita come un tutto di oggetti ben distinguibili dalla nostra intuizione o dal nostro pensiero”.

Possiamo pertanto definire **l'insieme** come *qualunque aggregato di elementi, distinguibili e ben definiti, per i quali è stabilita una specifica relazione di appartenenza.*

Cioè dato un elemento qualsiasi si deve poter stabilire con assoluta certezza se esso appartiene o non appartiene all'insieme considerato.

Esempi di insiemi sono:

- insieme dei numeri naturali minori di 100;
- insieme dei cittadini italiani che hanno votato alle ultime elezioni;
- insieme degli alberi del Central Park di New York.

Mentre i seguenti gruppi di elementi:

- insieme delle persone alte;
- insieme delle auto veloci;
- insieme dei calciatori bravi;

non costituiscono insiemi in quanto non è possibile stabilire con esattezza da quali elementi sono composti.

## 1.2 Rappresentazione degli insiemi

1) DIAGRAMMA DI VENN (O DI EULERO-VENN) – l'insieme è rappresentato in modo visivo, attraverso una linea chiusa che racchiude tutti gli elementi.

Ad esempio, mediante il diagramma di Venn, l'insieme delle prime 6 lettere dell'alfabeto italiano si rappresenta (figura 1.1):

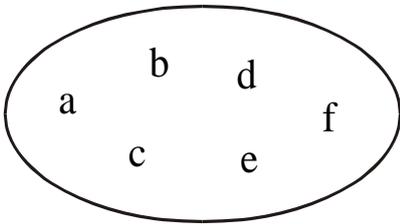


figura 1.1

2) PROPRIETA' CARATTERISTICA RELATIVA AGLI ELEMENTI

DELL'INSIEME – rappresentazione mediante la legge di appartenenza degli elementi all'insieme.

Nell'esempio precedente si ha:

$$X = \{x \mid x \text{ una delle prime 6 lettere dell'alfabeto italiano}\}$$

3) ELENCO DEGLI ELEMENTI – l'insieme è rappresentato mediante l'elenco di tutti gli elementi (rappresentazione tabulare).

Nell'esempio considerato risulta:

$$X = \{a, b, c, d, e, f\}$$

La proposizione “a è un elemento di X” si indica:

$$a \in X$$

si dice anche “a appartiene ad X”

mentre la proposizione “a non è un elemento di X” si indica:

$$a \notin X$$

si dice anche “a non appartiene ad X”

Un insieme privo di elementi, cioè l'insieme vuoto, si indica:

$$X = \{ \} = \emptyset$$

### 1.3 Insiemi complementare, intersezione, unione, differenza, prodotto cartesiano

Consideriamo due insiemi A e B,

- se l'insieme A è costituito dagli stessi elementi dell'insieme B, gli insiemi sono uguali:

$$A=B$$

- se ogni elemento di A è anche elemento di B allora A è sottoinsieme di B, oppure A è contenuto in B (figura 1.2):

$$A \subset B$$

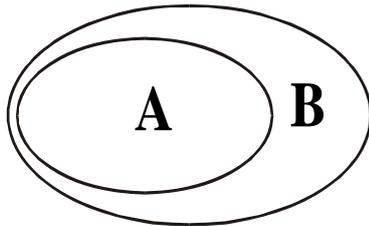


figura 1.2

Esempio:

$$A = \{a \mid a \text{ una delle prime 6 lettere dell'alfabeto italiano}\}$$

$$B = \{b \mid b \text{ una delle prime 10 lettere dell'alfabeto italiano}\}$$

Mediante il diagramma di Venn (figura 1.3) si ha:

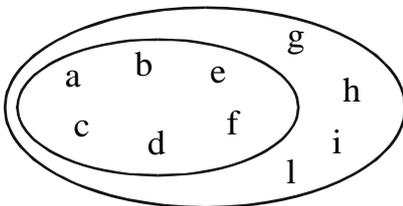


figura 1.3

Non confondere la relazione di **inclusione**  $\subset$ , che si riferisce agli insiemi, con quella di **appartenenza**  $\in$ , che si riferisce agli elementi di un certo insieme:

$$\subset \neq \in$$

Dato un insieme A, esistono sempre due suoi sottoinsiemi, A stesso e l'insieme vuoto. Questi due sottoinsiemi si dicono **impropri**, tutti gli altri si dicono **propri**.

Dati due insiemi A e B, con  $A \subset B$ , ad esempio:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l\}$$

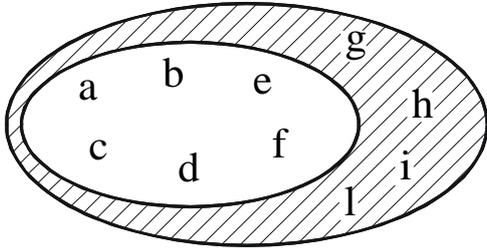
si definisce **complementare di A rispetto a B**, l'insieme costituito dagli elementi che appartengono a B e non appartengono ad A:

$$C_B A = B - A = \{x \mid x \in B, x \notin A\}$$

che nell'esempio diventa:

$$C_B A = B - A = \{g, h, i, l\}$$

L'insieme  $C_B A$ , mediante il diagramma di Venn, si rappresenta (figura 1.4):



In altri termini il complementare di A rispetto a B è dato dagli elementi che mancano ad A per essere uguale a B.

figura 1.4

Dati due insiemi A e B non disgiunti, si definisce **insieme intersezione di A e B** l'insieme  $C = A \cap B$  costituito da tutti gli elementi in comune, cioè che appartengono sia ad A che a B (figura 1.5).

$$C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

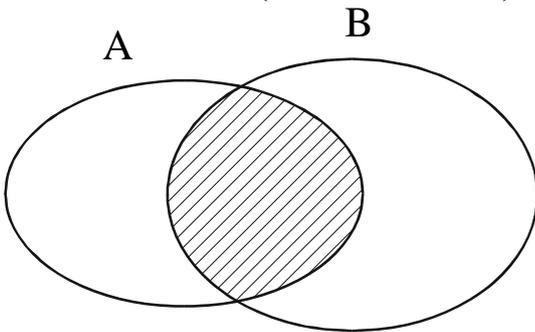


figura 1.5

Ad esempio, considerando gli insiemi:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$B = \{d, e, f, g, h, i\}$$

l'insieme C intersezione di A e B risulta:

$$C = A \cap B = \{d, e, f\}$$

Tale insieme, mediante il diagramma di Venn, si rappresenta (figura 1.6):

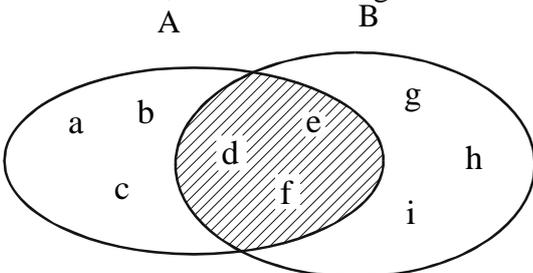


figura 1.6